TD numéro 7

Exercice 1. Soient $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ le morphisme de schémas associé à ϕ.

1. Montrer que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A alors les localisés de A et B par $A \setminus \mathfrak{p}$ sont $A_\mathfrak{p}$ et $B \otimes_A A_\mathfrak{p}$.
2. Montrer que ϕ est injectif si et seulement si $f^\sharp$ est injectif.
3. Montrer que si ϕ est surjectif, alors $f^\sharp$ est surjectif.
4. Montrer que si f est un homéomorphisme de Y vers un sous-ensemble fermé de X et $f^\sharp$ est surjectif alors ϕ est surjectif.

Exercice 2.

1. Soit X un schéma et $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ où les U_i sont des sous-schémas ouverts de X. Soient $f_i : U_i \to Y$ des morphismes de schémas tels que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ pour tous $i, j \in I$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de schémas $f : X \to Y$ tel que $f|_{U_i} = f_i$ pour tout $i \in I$.
2. Soit Y un schéma affine. Pour tout schéma X, montrer que l'application canonique
$$\rho : \mathrm{Mor}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$
est bijective.

Exercice 3. Soit X un schéma sur un corps k. Soit $\varphi : k[T_1, ..., T_n] \to \mathcal{O}_X(X)$ un morphisme de $k-$algèbres et $f : X \to \mathbb{A}^n_k$ le morphisme induit par φ.

Montrer que pour tout point rationnel $x \in X(k)$, via l'identification $\mathbb{A}^n_k(k) = k^n$, on a $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ (en notant également f l'application entre les ensembles de points rationnels), où $f_i = \varphi(T_i)$ et où $f_i(x)$ est l'image de f_i dans $k(x) = k$.

Exercice 4. Soit X un schéma sur un anneau A. Soient $f_0, ..., f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ tels que les $f_{i,x} \in \mathcal{O}_{X,x}$ engendrent l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$.

Montrer que X est l'union des X_{f_i}, qu'il existe un morphisme $f : X \to \mathbb{P}^n_A = \mathrm{Proj}(A[T_0, ..., T_n])$ tel que $f^{-1}(D_+(T_i)) = X_{f_i}$ ($D_+(T_i)$ étant l'ouvert distingué de $\mathbb{P}^n_A$ défini dans l'exercice 2 du TD6) et que $f|_{X_{f_i}}$ est induit par le morphisme $A[(T_i^{-1}T_j)_j] \to \mathcal{O}_X(X_{f_i})$ donné par $T_i^{-1}T_j \to f_i^{-1}f_j$.

Exercice 5. Soit X un espace annelé et $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux sur $\mathcal{O}_X$ (i.e pour tout U ouvert de X, $\mathcal{I}(U)$ est un idéal de $\mathcal{O}_X(U)$). On note $V(\mathcal{I}) = \{x \in X \mid \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$. Soit $j : V(\mathcal{I}) \to X$ l'inclusion.

Montrer que $V(\mathcal{I})$ est un fermé de X, que $(V(\mathcal{I}), j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ est un espace annelé et que l'on a une immersion fermée $(j, j^{\sharp)})$ de cet espace dans $(X, \mathcal{O}_X)$, avec $j^\sharp$ l'application canonique de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} = j_*(j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$.

Exercice 6. *Rappel :* Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On dit que f est *quasi-compact* si l'image réciproque de tout ouvert affine de Y est quasi-compact.

1. Montrer que toute immersion fermée est quasi-compacte.
   Dans tout ce qui suit on considère un morphisme $f : X \to Y$ quasi-compact.
2. Soit $\mathcal{I} = \mathrm{Ker}(f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X)$. Montrer que le sous-espace annelé $Z = V(\mathcal{I})$ de Y est un schéma.
3. Soit $j : Z \to Y$ une immersion fermée. Montrer qu'il existe un morphisme $g : X \to Z$ tel que $f = j \circ g$.
4. Monter que si $f = g' \circ j'$ où $g' : X \to Z'$ est un morphisme de schémas et $j' : Z' \to Y$ une immersion fermée, alors Z est un sous-schéma fermé de Z'.
5. Montrer que $f(X)$ est dense dans Z.

Exercice 7. Un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est dit *quasi-fini* si f est de type fini et pour tout point $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est un ensemble fini.

1. Montrer qu'un morphisme fini est quasi-fini.
2. Montrer qu'un morphisme fini est fermé.
3. Montrer qu'un morphisme surjectif et quasi-fini n'est pas nécessairement fini.